多項式係数を持つ非斉次線形常微分方程式の形式解の係数に関する評価(複素領域の偏微分方程式)

中村, 弥生

数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 106-122

多項式係数を持つ非斉次線形常微分方程式の形式解の係数に関する評価

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科複合領域科学専攻
中村 弥生 (Yayoi Nakamura)

1 Introduction

多項式係数をもつ 2 階の線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - p(x)y = 0, p(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

は, 無限遠点を不確定度 $m+2$ の不確定特異点としてもち, その他の特異点をもたない. これは, 次の 4 つの場合, 積分の形で表される解を持つことが分かる.

(i) $p(x) = x + a_1$

(ii) $p(x) = x^2 + a_1x + a_2$

(iii) $p(x) = x^m$

(iv) $p(x) = x^{2p} + cx^{p-1}$

これらの場合, 方程式は, 一般合流型超幾何微分方程式に帰着する. 特に, (i) の解は Airy 関数として, (ii) の解は parabolic cylinder 関数として, 良く知られたものである.

一方, 与えられた微分作用素 P に関し, Deligne の同型定理により

$$H^1(S^1, \mathcal{K}er(P; \mathcal{A}_0)) \cong \mathrm{Ker}(P; \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$$

が成り立ち, $\mathrm{Ker}(P; \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底を取ることができる. また, これに注目して, 「漸近級数の係数の漸近評価を伴った漸近解析における消滅定理」を用いることにより, 作用素 P に関するある非斉次方程式の形式解の係数, 及び, 形式解の係数の漸近評価を求めることができる.

ここでは, (iii), (iv) の場合の作用素 $P = \dfrac{d^2}{dx^2} - p(x)$ に関する非斉次方程式の形式解について計算をする. 特に, (iii) に関して, $\mathrm{Ker}(P; \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底の取り方を詳しく見て行く. この手法は Majima による「漸近級数の係数の漸近評価を伴った漸近解析における消滅定理」の証明に沿っている. 定理とその証明に関しては文献を参照されたい.

2 $P=\dfrac{d^2}{dx^2}-x^m$ の場合

任意の実数 $R>0$ に対して, U_k, S_k を $k=0,1,\ldots,m+1$ に対して次で決まる開扇形領域とする.

$$\begin{aligned}
U_k &= \left\{x\in\mathbf{C}; |x|>R, \frac{2k-3}{m+2}\pi<\arg x<\frac{2k+1}{m+2}\pi\right\},\\
S_k &= U_k\cap U_{k+1}\\
&= \left\{x\in\mathbf{C}; |x|>R, \frac{2k-1}{m+2}\pi<\arg x<\frac{2k+1}{m+2}\pi\right\}.
\end{aligned}$$

但し, $U_{m+2}=U_0$ とおく. このとき, $\{U_k, k=0,1,\ldots,m+1\}$ は, $x=\infty$ で開扇形被覆をなす.

2.1 斉次方程式の解

方程式

$$(\frac{d^2}{dx^2}-x^m)y=0$$

は, 次の性質を満たす解 y_k を持つ. つまり, y_k は x の整関数であり, 扇型領域 $S_{k-1}\cup\bar{S}_k\cup S_{k+1}$ 上で x が無限遠点に近づくとき, 次の漸近表示を持つ.

$$y_k\sim\omega^{\frac{m}{4}k}x^{-\frac{m}{4}}(1+\sum_{N=1}^{\infty}B_N\omega^{\frac{k}{2}N}x^{-\frac{N}{2}})exp\{(-1)^{k+1}\frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\}$$

但し, $\omega=e^{\frac{2}{m+2}\pi i}$ であって, B_N は $N=0,1,\ldots$ に対して, 次で決まる.

$$B_{(m+2)(N+1)}=\prod_{\ell=0}^{N}\frac{-1}{(m+2)(\ell+1)}\{\frac{m}{4}(\frac{m}{4}+1)+\frac{\ell m(m+2)}{4}+\frac{\ell(m+2)}{2}(\frac{\ell(m+2)}{2}+1)\},$$

$$B_j=0, j\neq(m+2)(N+1).$$

一方, $x^{\frac{m+2}{2}}=z$ とおくことにより, 作用素 $x^2\dfrac{d^2}{dx^2}-x^{m+2}$ は次のように変換される.

$$\begin{aligned}
x^2\frac{d^2}{dx^2}-x^{m+2} &= (x\frac{d}{dx})(x\frac{d}{dx}-1)-x^{m+2}\\
&= (\frac{m+2}{2}z\frac{d}{dz})(\frac{m+2}{2}z\frac{d}{dz}-1)-z^2\\
&= (\frac{m+2}{2})^2z\{z\frac{d^2}{dz^2}+(1-\frac{2}{m+2})\frac{d}{dz}-(\frac{2}{m+2})^2z\}.
\end{aligned}$$

このとき, 微分方程式

$$\{z\frac{d^2}{dz^2}+(1-\frac{2}{m+2})\frac{d}{dz}-(\frac{2}{m+2})^2z\}u(z)=0$$

は $z=0,\infty$ を特異点に持つ一般合流型超幾何微分方程式であり, $z=\infty$ を頂点とする角領域で定義された解は, 一般化された Laplace 変換の形を用いて, 次の $u_-(z), u_+(z)$ で与えられる.

$$\begin{aligned} u_-(z) &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})(e^{2\pi i(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}-1)}\int_{L_-} e^{z\zeta}(\zeta-\frac{2}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta \\ &= \frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty} e^{-z(\zeta+\frac{2}{m+2})}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta \end{aligned}$$

但し, L_- は $-\infty$ から出発し, $\zeta=-\frac{2}{m+2}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $-\infty$ に戻る道である. $u_-(z)$ は$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

$$\begin{aligned} u_+(z) &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})(e^{2\pi i(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}-1)}\int_{L_+} e^{z\zeta}(\zeta-\frac{2}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta \\ &= \frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty} e^{z(\zeta+\frac{2}{m+2})}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta \end{aligned}$$

但し, L_+ は $+\infty$ から出発し, $\zeta=+\frac{2}{m+2}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $+\infty$ に戻る道である. $u_-(z)$ は$\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

これより微分方程式

$$(\frac{d^2}{dx^2}-x^m)y=0$$

の解で上に述べた性質を持つものは次のように与えられる.

$$y_{2k}=\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta$$

$$y_{2k+1}=\frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty} e^{x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta$$

各 y_k は, 扇型領域 S_k における subdominant solution を与える.

2.2 $\mathrm{Ker}(\frac{d^2}{dx^2}-x^m;\widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底

$\{U_0,U_1,\ldots,U_{m+1}\}$ に対する 1-cocycle を $k=0,1,\ldots,m+1$ に対して

$$\{u^{(k)}_{j,j+1}, j=0,1,\cdots,m+1\}, \text{但し}\ u^{(k)}_{m+1,m+2}=u^{(k)}_{m+1,0},$$

$$u^{(k)}_{j,j+1}=\begin{cases} y_j & x\in S_j \quad j=k \\ 0 & x\in S_j \quad i\neq k \end{cases}$$

とおく. すると, $\{u^{(0)}_{j,j+1}\},\{u^{(1)}_{j,j+1}\},\ldots,\{u^{(m+1)}_{j,j+1}\}$ のコホモロジー類が $H^1(S^1,\mathcal{K}er(P;\mathcal{A}_0))$ の基底をなす.

ここで, 次の記号を導入する.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon' &:= \frac{\pi}{2(m+2)},\\
0 &< \varepsilon < \min\{\varepsilon', R\},\\
R' &:= R+\varepsilon,\\
a'_\ell &:= \frac{2\ell-3}{m+2}\pi+\varepsilon,\\
b'_\ell &:= \frac{2\ell+1}{m+2}\pi-\varepsilon,\\
U'_\ell &:= \{x\in\mathbf{C}; |x|>R', a'_\ell<\arg x<b'_\ell\},\\
S'_\ell &:= \left\{x\in\mathbf{C}; |x|>R', a'_{\ell+1}<\arg x<b'_\ell\right\},\\
L(\ell,-') &:= (tR'\exp(ia'_{\ell+1}))_{t\in[1,+\infty)},\\
L(\ell,+') &:= (tR'\exp(ib'_\ell))_{t\in[1,+\infty)},\\
\tau_\ell &:= \frac{a_{\ell+1}+b_\ell}{2}\\
&= \frac{2\ell}{m+2}\pi,\\
c(\ell,-') &:= (R'\exp(i((1-t)a'_{\ell+1}+t\tau_\ell)))_{t\in[0,1]},\\
c(\ell,+') &:= (R'\exp(i((1-t)b'_\ell+t\tau_\ell)))_{t\in[0,1]},\\
\gamma_{\ell,-'} &:= c(\ell,-')\cup L(\ell,-'),\\
\gamma_{\ell,+'} &:= c(\ell,+')\cup L(\ell,+'),\\
\gamma'_\ell &:= (tR'\exp(i\tau_\ell))_{t\in[1,+\infty)},\\
R'' &:= R+2\varepsilon,\\
a''_\ell &:= \frac{2\ell-3}{m+2}\pi+2\varepsilon,\\
b''_{\ell-1} &:= \frac{2\ell+1}{m+2}\pi-2\varepsilon,\\
U''_\ell &:= \{x\in\mathbf{C}; |x|>R'', a''_\ell<\arg x<b''_\ell\},\\
S''_\ell &:= \left\{x\in\mathbf{C}; |x|>R'', a''_{\ell+1}<\arg x<b''_\ell\right\},\\
L(\ell,-'') &:= (tR''\exp(ia''_{\ell+1}))_{t\in[1,+\infty)},\\
L(\ell,+'') &:= (tR''\exp(ib''_\ell))_{t\in[1,+\infty)},\\
c(\ell,-'') &:= (R''\exp(i((1-t)a''_{\ell+1}+t\tau_\ell)))_{t\in[0,1]},\\
c(\ell,+'') &:= (R''\exp(i((1-t)b''_\ell+t\tau_\ell)))_{t\in[0,1]},\\
\gamma_{\ell,-''} &:= c(\ell,-'')\cup L(\ell,-''),\\
\gamma_{\ell,+''} &:= c(\ell,+'')\cup L(\ell,+'').
\end{aligned}
$$

ここで, S_kで定義される関数族 $(F_k)_{k=0,1,\ldots,m+1}$ に対して, 次を定義する.

$$Integ(\ell;(F_k)_{k=0,1,\ldots,m+1})(x)$$

$$:= \frac{1}{2\pi i}\{\sum_{j\neq \ell-1,\ell}\int_{\gamma'_j} F_j(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_{\ell-1,-'}} F_{\ell-1}(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_{\ell,+'}} F_\ell(\zeta)d\zeta\}, \ell = 0,1,\dots,m+1.$$

今,

$$\partial S'_\ell = \gamma_{\ell,-'} \cup \gamma_{\ell,+'},$$
$$\partial S''_\ell = \gamma_{\ell,-''} \cup \gamma_{\ell,+''}$$

であり,

$$S''_\ell \subset S'_\ell$$

であるから $x \in S''_\ell, \zeta \in \partial S'_\ell$に対して，$|x-\zeta| > \varepsilon$ が成り立つ. すると $x \in S''_\ell$に対して,

$$v_\ell^{(k)}(x) := Integ(\ell;((\zeta - x)^{-1}u_{j,j+1}^{(k)})_{j=0,1,\dots,m+1}),$$

とおくと $\partial S'_\ell$ 上で $u_{\ell,\ell+1}^{(k)}$ が指数的に減少または 0 であるから，積分は意味をもつ．また $x \in S''_\ell$ に対して,

$$\begin{aligned}
-v_\ell^{(k)} + v_{\ell+1}^{(k)} &= \frac{-1}{2\pi i}\{\sum_{j\neq\ell-1,\ell}\int_{\gamma'_j}\frac{u_{j,j+1}^{(k)}}{\zeta - x}d\zeta + \int_{\gamma_{\ell-1}-'}\frac{u_{\ell-1,\ell}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_\ell+'}\frac{u_{\ell,\ell+1}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta\} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\{\sum_{j\neq\ell,\ell+1}\int_{\gamma'_j}\frac{u_{j,j+1}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_\ell-'}\frac{u_{\ell,\ell+1}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_{\ell+1}+'}\frac{u_{\ell+1,\ell+2}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\{-\int_{\gamma'_{\ell+1}}\frac{u_{\ell+1,\ell+2}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta - \int_{\gamma_{\ell-1}-'}\frac{u_{\ell-1,\ell}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta - \int_{\gamma_\ell+'}\frac{u_{\ell,\ell+1}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta \\
&\quad + \int_{\gamma'_{\ell-1}}\frac{u_{\ell-1,\ell}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_\ell-'}\frac{u_{\ell,\ell+1}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_{\ell+1}+'}\frac{u_{\ell+1,\ell+2}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\{\int_{\gamma'_{\ell-1}-\gamma_{\ell-1}-'}\frac{u_{\ell-1,\ell}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_\ell-'-\gamma_\ell+'}\frac{u_{\ell,\ell+1}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta + \int_{\gamma_{\ell+1}+'-\gamma'_{\ell+1}}\frac{u_{\ell+1,\ell+2}^{(k)}}{\zeta-x}d\zeta\} \\
&= 0 + u_{\ell,\ell+1}^{(k)} + 0
\end{aligned}$$

つまり, $x \in S''_\ell$ に対して

$$u_{\ell,\ell+1}^{(k)}(x) = -v_\ell^{(k)}(x) + v_{\ell+1}^{(k)}(x)$$

が成り立つ. これより,

$$v_\ell^{(k)}(x) = \begin{cases} v_{\ell-1}^{(k)}(x) + u_{\ell-1,\ell}^{(k)}(x), & x \in \{x \in \mathbf{C} \mid |x| > R'', a_\ell < \arg x < a''_\ell\} \\ v_{\ell+1}^{(k)}(x) - u_{\ell,\ell+1}^{(k)}(x) & x \in \{x \in \mathbf{C} \mid |x| > R'', b''_\ell < \arg x < b_\ell\} \end{cases}$$

によって $v_\ell^{(k)}(x)$ は $\{x \in \mathbf{C} \mid |x| > R'', a_\ell < \arg x < b_\ell\}$ に解析接続される. これより,

$$u_{\ell,\ell+1}^{(k)} = -v_\ell^{(k)} + v_{\ell+1}^{(k)}$$

を満たす 0-cochain $\{v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_{m+1}^{(k)}\}, k=0,1,\ldots,m+1$ を得る.
今,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta-x} &= -\frac{1}{x}(\frac{1}{1-\frac{\zeta}{x}}) \\
&= -\frac{1}{x}(1+\frac{\zeta}{x}+(\frac{\zeta}{x})^2+\cdots+(\frac{\zeta}{x})^{L-1})+\frac{1}{\zeta-x}(\frac{\zeta}{x})^L \\
&= -\frac{1}{x}-\frac{\zeta}{x^2}-\cdots-\frac{\zeta^{L-1}}{x^L}+\frac{1}{\zeta-x}(\frac{\zeta}{x})^L
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
v_\ell^{(k)} &= Integ(\ell;(-\sum_{r=1}\frac{\zeta^{r-1}u_{j,j+1}^{(k)}}{x^r})_{j=0,1,\ldots,m+1}) \\
&= \sum_{r=1}(Integ(\ell;(-\zeta^{r-1}u_{j,j+1}^{(k)})_{j=0,1,\ldots,m+1}))x^{-r}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
T_{\ell,r}^{(k)} &= Integ(\ell;(-\zeta^{r-1}u_{j,j+1}^{(k)})_{j=0,1,\ldots,m+1}), \\
E_{\ell,L}^{(k)}(x) &= Integ(\ell;(\frac{\zeta^L u_{j,j+1}^{(k)}(\zeta)}{\zeta-x})_{j=0,1,\ldots,m+1})
\end{aligned}$$

とおけば,

$$v_\ell^{(k)} = \sum_{r=1}^{L-1} T_{\ell,r}^{(k)}x^{-r} + E_{\ell,L}^{(k)}(x)x^{-L}$$

が成り立つ.

$\partial S'_\ell$ で $u_{\ell,\ell+1}^{(k)}$ は指数減少または 0 であるから, $v_\ell^{(k)}$ は $\{x \in \mathbf{C}||x| > R'', a_\ell < \arg x < b_\ell\}$ 上で形式巾級数

$$\hat{v}_\ell^{(k)}(x) = \sum T_{\ell,r}^{(k)}x^{-r}$$

に漸近展開可能である.

いま, $u_{\ell,\ell+1}^{(k)} = -v_\ell^{(k)} + v_{\ell+1}^{(k)}$ は $\{x \in \mathbf{C}||x| > R'', a_{\ell+1} < \arg x < b_\ell\}$ で subdominant であるから,

$$\sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell,r}^{(k)}x^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell+1,r}^{(k)}x^{-r}.$$

よって,

$$\sum_{r=1}^{\infty} v_{(r)}^{(k)}x^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} T_{\ell,r}^{(k)}x^{-r}$$

とおけば,

$$v_{(r)}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\{\sum_{\ell=0}^{m+1}\int_{\gamma'_\ell} -\zeta^{r-1}u_{\ell,\ell+1}^{(k)}d\zeta\}$$

となるが, $u^{(k)}_{\ell,\ell+1}$ の定義より

$$v^{(k)}_{(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_k} -\zeta^{r-1} y_k d\zeta \tag{1}$$

を得る.

さて, $Pu^{(k)}_{j,j+1} = -Pv^{(k)}_j + Pv^{(k)}_{j+1}$ より, $x \in S_j$ に対して,

$$Pv^{(k)}_j = Pv^{(k)}_{j+1}.$$

これより

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} Pv^{(k)}_j & x \in U_j \\ Pv^{(k)}_j + 1 & x \in U_j + 1 \end{cases}$$

とおき, 更に,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & x \in \mathbf{C} \\ \lim_{x\to\infty} g^{(k)}(x) & x = \infty \end{cases}$$

とおけば,

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} v^{(k)}_{(r)} x^{-r}$$

は, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解となる. このとき, $\langle[\hat{v}^{(0)}], [\hat{v}^{(1)}], \ldots, [\hat{v}^{(m+1)}]\rangle$ が $\mathrm{Ker}(\frac{d^2}{dx^2} - x^m; \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底をなす.

2.2.1 $v^{(k)}_{(r)}$ の計算

実際に $v^{(k)}_{(r)}$ を計算する.

(1) により, $k = 0, 1, \ldots, m+1$ に対して, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解の係数は

$$v^{(k)}_{(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k}{m+2}\pi}\infty} -x^{r-1} y_k dx$$

によって求められる.

$v^{(k)}_{(r)}$の漸近表示

k が偶数, 奇数にかかわらず, $v^{(k)}_{(r)}$は次のように計算出来る.

$$
\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k}{m+2}\pi i}\infty} -x^{r-1}y_{m,k}dx \\
&\sim \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k}{m+2}\pi i}\infty}\{-x^{r-1}(\omega^{-k}x)^{-\frac{m}{4}}(1+\sum_{N=0}^{M-1}B_{(m+2)(N+1)}(\omega^{-k}x)^{-\frac{(m+2)(N+1)}{2}}) \\
&\quad + O(x^{r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)})\}e^{(-1)^{k+1}\frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}}dx
\end{aligned}
$$

$\omega^{-k}x=\xi$とおく.

$$
\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &\sim \frac{-1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\{(\omega^{-k}\xi)^{r-1}\xi^{-\frac{m}{4}}(1+\sum_{N=0}^{M-1}B_{(m+2)(N+1)}\xi^{-\frac{m+2}{2}(N+1)}) \\
&\quad + O(\xi^{r--1\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)})\}e^{-\frac{2}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}}\omega^k d\xi \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\{\xi^{r-1-\frac{m}{4}}+\sum_{N=0}^{M-1}B_{(m+2)(N+1)}\xi^{r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1)} \\
&\quad + O(\xi^{r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)})\}e^{-\frac{2}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}}d\xi
\end{aligned}
$$

$\frac{2}{m+2}\xi^{\frac{m+2}{2}}=\zeta$とおく.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\{(\frac{m+2}{2}\zeta)^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4})} \\
&\quad + \sum_{N=0}^{M-1}B_{(m+2)(N+1)}(\frac{m+2}{2}\zeta)^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1))} \\
&\quad + O(\zeta^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1))})\}e^{-\zeta}(\frac{m+2}{2}\zeta)^{\frac{2}{m+2}-1}d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i}(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}-1}\{(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4})}\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})) \\
&\quad + \sum_{N=0}^{M-1}B_{(m+2)(N+1)}(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-1-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1))}\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1))) \\
&\quad + O(\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1)))\} \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i}(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})-1}\{\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})) \\
&\quad + \sum_{N=0}^{M-1}B_{(m+2)(N+1)}(\frac{m+2}{2})^{-(N+1)}\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1)))\} \\
&\quad + O(\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1))).
\end{aligned}
$$

よって, rが十分大きい時, $1\leq M<r$なるMに対して, $v_{(r)}^{(k)}$は次の漸近評価をもつ.

$$
v_{(r)}^{(k)} \sim \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}kr}}{2\pi i}(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4})-1}\{\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}))
$$

$$+\sum_{N=0}^{M-1} B_{(m+2)(N+1)}(\frac{m+2}{2})^{-(N+1)}\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(N+1)))\}$$
$$+O(\Gamma(\frac{2}{m+2}(r-\frac{m}{4}-\frac{m+2}{2}(M+1))).$$

$k=$偶数の場合

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^{(2k)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{4k}{m+2}\pi i}\infty} -x^{r-1}y_{2k}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{4k}{m+2}\pi i}\infty} -x^{r-1}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta dx \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{e^{\frac{4k}{m+2}\pi i}\infty} x^{r-1}e^{-x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})}dxd\zeta
\end{aligned}$$

$x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})=\xi$ とおく.

$$\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}(\frac{\xi}{\zeta+\frac{2}{m+2}})^{\frac{2}{m+2}(r-1)}e^{-\xi}\frac{2}{m+2}(\frac{\xi}{\zeta+\frac{2}{m+2}})^{\frac{2}{m+2}-1}(\frac{1}{\zeta+\frac{2}{m+2}})d\xi d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\frac{2}{m+2}\int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})^{-\frac{2}{m+2}r} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\xi^{\frac{2}{m+2}r-1}d\xi d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\frac{2}{m+2}\Gamma(\frac{2r}{m+2}) \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})^{-\frac{2}{m+2}r}d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\frac{2}{m+2}\Gamma(\frac{2r}{m+2})(\frac{4}{m+2})^{-\frac{2}{m+2}}(\frac{2}{m+2})^{-\frac{2r}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}(\frac{m+2}{4}\zeta)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(1+\frac{m+2}{4}\zeta)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(1+2\frac{m+2}{4}\zeta)^{-\frac{2r}{m+2}}d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\frac{2}{m+2})^{1-\frac{2r}{m+2}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(\frac{2r}{m+2})\Gamma(\frac{2r+2}{m+2})}{\Gamma(\frac{2r+1}{m+2}+\frac{1}{2})}F(\frac{2r}{m+2},\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2},\frac{2r+1}{m+2}+\frac{1}{2};-1).
\end{aligned}$$

k =奇数の場合

$$
\begin{aligned}
v_{(r)}^{(2k+1)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2(2k+1)}{m+2}\pi i}\infty} -x^{r-1}y_{2k+1}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2(2k+1)}{m+2}\pi i}\infty} -x^{r-1}\frac{(-1)^{\frac{2}{m+2}}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} e^{x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta dx \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}}}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{e^{\frac{2(2k+1)}{m+2}\pi i}\infty} x^{r-1}e^{x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})}dx d\zeta
\end{aligned}
$$

$x^{\frac{m+2}{2}}(\zeta+\frac{2}{m+2}) = -\xi$ とおく.

$$
\begin{aligned}
v_{(r)}^{(2k+1)} &= \frac{(-1)^{1+\frac{2}{m+2}}}{2\pi i}\frac{(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})}\int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}(-\frac{\xi}{\zeta+\frac{2}{m+2}})^{\frac{2}{m+2}(r-1)}e^{-\xi}(-\frac{1}{\zeta+\frac{2}{m+2}})(\frac{2}{m+2})(-\frac{\xi}{\zeta+\frac{2}{m+2}})^{\frac{2}{m+2}-1}d\xi d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{\frac{2(r+1)}{m+2}-1}}{2\pi i}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}\frac{2}{m+2}\frac{\Gamma(\frac{2r}{m+2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}\zeta^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\zeta+\frac{2}{m+2})^{-\frac{2}{m+2}r}(\zeta+\frac{4}{m+2})^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{\frac{2(r+1)}{m+2}-1}}{2\pi i}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}-\frac{2}{m+2}}(\frac{2}{m+2})^{1-\frac{2r}{m+2}}\frac{\Gamma(\frac{2r}{m+2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2})} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}(\frac{m+2}{4}\zeta)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(1+\frac{m+2}{4}\zeta)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(1+2\frac{m+2}{4}\zeta)^{-\frac{2r}{m+2}}\frac{m+2}{4}d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{\frac{2(r+1)}{m+2}-1}}{2\pi i}(\frac{4}{m+2})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}}(\frac{2}{m+2})^{1-\frac{2r}{m+2}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(\frac{2r}{m+2})\Gamma(\frac{2r+2}{m+2})}{\Gamma(\frac{2r+1}{m+2}+\frac{1}{2})}F(\frac{2r}{m+2},\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2},\frac{2r+1}{m+2}+\frac{1}{2};-1).
\end{aligned}
$$

3　$P = \frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p} + cx^{p-1})$ の場合

任意の実数 $R > 0$ に対して, U_k, S_k を $k = 0, 1, \ldots, 2p+1$ に対して次で決まる開扇形領域とする.

$$
\begin{aligned}
U_k &= \left\{x \in \mathbf{C}; |x| > R, \frac{2k-3}{2p+2}\pi < \arg x < \frac{2k+1}{2p+2}\pi\right\}, \\
S_k &= U_k \cap U_{k+1} \\
&= \left\{x \in \mathbf{C}; |x| > R, \frac{2k-1}{2p+2}\pi < \arg x < \frac{2k+1}{2p+2}\pi\right\}.
\end{aligned}
$$

但し, $U_{2p+2} = U_0$ とおく. このとき, $\{U_k, k = 0, 1, \ldots, 2p+1\}$ は, $x = \infty$ で開扇形被覆をなす.

3.1　斉次方程式の解

方程式

$$
(\frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p} + cx^{p-1}))y = 0
$$

は, 次の性質を満たす解 y_k を持つ. つまり, y_k は x の整関数であり, 扇型領域 $S_{k-1} \cup \bar{S}_k \cup S_{k+1}$ 上で x が無限遠点に近づくとき, 次の漸近表示を持つ.

$$
y_k \sim \omega^{\frac{p+1}{2}k} x^{-\frac{p+1}{2}} (1 + \sum_{N=1}^{\infty} B_{2N(p+1)}(\omega^{-(p+1)k}c)\omega^{kN} x^{-N}) exp\{-\frac{1}{p+1}(\omega^{-k}x)^{p+1}\}
$$

但し, $\omega = e^{\frac{1}{p+1}\pi i}$ であって, $B_{2N(p+1)}(c)$ は $N = 0, 1, \ldots$ に対して, 次で決まる.

$$
B_{2N(p+1)}(c) = \prod_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{4(2p+2))\ell} \prod_{\ell=0}^{N-1} ((2p+2)\ell - p + c)((2p+2)\ell - p - 2 + c)
$$

$$
B_j(c) = 0, j \neq 2N(p+1)
$$

一方, $x^{p+1} = z$ とおくことにより, 作用素 $x^2 \frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p+2} + cx^{p+1})$ は次のように変換される.

$$
\begin{aligned}
x^2 \frac{d^2}{dx^2} - (x^{2p+2} + cx^{p+1}) &= (x\frac{d}{dx})(x\frac{d}{dx} - 1) - (x^{2p+2} + cx^{p+1}) \\
&= ((p+1)z\frac{d}{dz})((p+1)z\frac{d}{dz} - 1) - (z^2 + cz) \\
&= (p+1)^2 z\{z\frac{d^2}{dz^2} + \frac{p}{p+1}\frac{d}{dz} - \frac{z+c}{(p+1)^2}\}.
\end{aligned}
$$

このとき, 微分方程式

$$
\{z\frac{d^2}{dz^2} + \frac{p}{p+1}\frac{d}{dz} - \frac{z+c}{(p+1)^2}\}u = 0
$$

は $z=0,\infty$ を特異点に持つ一般合流型超幾何微分方程式であり, $z=\infty$ を頂点とする角領域で定義された解は, 一般化された Laplace 変換の形を用いて, 次の $u_-(z), u_+(z)$ で与えられる.

$$
\begin{aligned}
u_-(z) &= \frac{(-1)^{\frac{1}{p+1}}(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))e^{2\pi i(\frac{1}{2}\frac{c-1}{p+1}-1)}-1}\int_{L_-} e^{z\zeta}(\zeta-\frac{1}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}d\zeta \\
&= \frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))}\int_0^{+\infty}(-1)^{-\frac{1}{p+1}+1}e^{-z(\zeta+\frac{1}{p+1})}\zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}d\zeta
\end{aligned}
$$

但し, L_- は $-\infty$ から出発し, $\zeta=-\frac{1}{p+1}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $-\infty$ に戻る道である. $u_-(z)$ は$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

$$
\begin{aligned}
u_+(z) &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1}(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)(e^{2\pi i(-\frac{1}{2}\frac{c+1}{p+1}+1)}-1)} \\
&\quad\times\int_{L_+} e^{z\zeta}(\zeta-\frac{1}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1}(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}\int_0^{+\infty} e^{z(\zeta+\frac{1}{p+1})}\zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}d\zeta
\end{aligned}
$$

但し, L_+ は $+\infty$ から出発し, $\zeta=+\frac{1}{p+1}$ のまわりを正の向きに一周し, 再び $+\infty$ に戻る道である. $u_+(z)$ は$\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$ なる扇形領域で正則な解を与える.

これより微分方程式

$$
(\frac{d^2}{dx^2}-(x^{2p}+cx^{p-1}))y=0
$$

の解で上に述べた性質を持つものは次のように与えられる.

$$
y_{2k}=\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))}\int_0^{+\infty} e^{-x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})}\zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}d\zeta
$$

$$
y_{2k+1}=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1}(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}\int_0^{+\infty} e^{x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})}\zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}d\zeta
$$

各 y_k は, 扇型領域 S_k における subdominant solution を与える.

3.2 $\mathrm{Ker}(\frac{d^2}{dx^2}-(x^{2p}+cx^{p-1});\widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底

$\{U_0,U_1,\ldots,U_{2p+1}\}$ に対する 1-cocycle を $k=0,1,\ldots,2p+1$ に対して

$$
\{u^{(k)}_{j,j+1}, j=0,1,\cdots,2p+1\}, \text{但し } u^{(k)}_{2p+1,2p+2}=u^{(k)}_{2p+1,0}, k=0,1,\ldots,2p+1
$$

を

$$u^{(k)}_{j,j+1} = \begin{cases} y_j & x \in S_j \quad j = k \\ 0 & x \in S_j \quad j \neq k \end{cases}$$

とおく. すると, $\{u^{(0)}_{j,j+1}\}, \{u^{(1)}_{j,j+1}\}, \ldots, \{u^{(2p+1)}_{j,j+1}\}$ のコホモロジー類が $H^1(S^1, \mathcal{K}er(P : \mathcal{A}_0))$ の基底をなす.

漸近解析における消滅定理により,

$$u^{(k)}_{j,j+1} = -v^{(k)}_j + v^{(k)}_{j+1}$$

を満たす0-cochain $\{v^{(k)}_0, v^{(k)}_1, \ldots, v^{(k)}_{2p+1}\}$, $(k = 0, 1, \ldots, 2p+1)$ を得る. 但し, $v^{(k)}_j$ は U_j, $(j = 0, 1, \ldots, 2p+1)$ で定義され, それぞれ形式巾級数$\hat{v}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} v^{(k)}_{(r)} x^{-r}, k = 0, 1, \ldots, 2p+1$ を漸近展開に持つ.

$$Pu^{(k)}_{j,j+1} = -Pv^{(k)}_j + Pv^{(k)}_{j+1}$$

より, $x \in S_i$ に対して,

$$Pv^{(k)}_j = Pv^{(k)}_{j+1}$$

だから,

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} Pv^{(k)}_j & x \in U_j \\ Pv^{(k)}_{j+1} & x \in U_{j+1} \end{cases}$$

とおき, 更に, 改めて,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) & x \in \mathbf{C} \\ \lim_{x \to \infty} g^{(k)}(x) & x = \infty \end{cases}$$

と表せば,

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} v^{(k)}_{(r)} x^{-r}$$

は, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解となる. このとき, $\langle [\hat{v}^{(0)}], [\hat{v}^{(1)}], \ldots, [\hat{v}^{(2p+1)}] \rangle$ が $\mathrm{Ker}(\frac{d^2}{dx^2} - (x^2p + cx^{p-1}); \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ の基底をなす.

3.2.1 $v^{(k)}_{(r)}$ の計算

実際に $v^{(k)}_{(r)}$ を計算する.

漸近解析における消滅定理より, $k = 0, 1, \ldots, 2p+1$ に対して, 非斉次微分方程式

$$P\hat{v}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

の形式解の係数は

$$v^{(k)}_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{e^{\frac{2k}{2p+2}\pi}\infty} -x^{r-1} y_k dx, \quad k = 0, 1, \ldots, 2p+1$$

によって求められる.

v_rの漸近表示

kが偶数, 奇数にかかわらず, $v_{(r)}^{(k)}$は次のように計算出来る.

$$
\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{k}{p+1}\pi i}\infty} -x^{r-1}y_k dx \\
&\sim \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{k}{p+1}\pi i}\infty}\{-x^{r-1}(\omega^{-k}x)^{-\frac{p+1}{2}}(1+\sum_{N=1}^{M-1}B_{2N(p+1)}(\omega^{-(p+1)k}c)(\omega^{-k}x)^{-N(p+1)} \\
&\quad + O(x^{r-1-\frac{p+1}{2}M(p+1)})\}e^{(-1)^{k+1}\frac{1}{p+1}x^{p+1}}dx
\end{aligned}
$$

$\omega^{-k}x = \xi$とおく.

$$
\begin{aligned}
v_{(r)}^{(k)} &\sim \frac{-1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\{(\omega^k\xi)^{r-1}\xi^{-\frac{p+1}{2}}(1+\sum_{N=1}^{M-1}B_{2N(p+1)}((-1)^k c)\xi^{-N(p+1)} \\
&\quad + O(\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1)})\}e^{-\frac{1}{p+1}\xi^{p+1}}d\xi \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\{\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}}+\sum_{N=1}^{M-1}B_{2N(p+1)}((-1)^k c)\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}-N(p+1)} \\
&\quad + O(\xi^{r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1)})\}e^{-\frac{1}{p+1}\xi^{p+1}}d\xi
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{p+1}\xi^{p+1} = \zeta$とおく.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\{((p+1)\zeta)^{\frac{1}{p+1}(r-1-\frac{p+1}{2})} \\
&\quad + \sum_{N=1}^{M-1}B_{2N(p+1)}((-1)^k c)((p+1)\zeta)^{\frac{1}{p+1}(r-1-\frac{p+1}{2}-N(p+1))} \\
&\quad + O(\xi^{\frac{1}{p+1}(r-1-\frac{p+1}{2}-M(p+1))})\}e^{\zeta}((p+1)\zeta)^{\frac{1}{p+1}-1}d\zeta \\
&= \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i}(p+1)^{\frac{1}{p+1}-1}\{(p+1)^{\frac{1}{p+1}(r-1)-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{p+1}r-\frac{1}{2}) \\
&\quad + \sum_{N=1}^{M-1}B_{2N(p+1)}((-1)^k c)(p+1)^{\frac{1}{p+1}(r-1)-\frac{1}{2}-N}\Gamma(\frac{1}{p+1}(r-1)-\frac{1}{2}-N)\} \\
&\quad + O(\Gamma(\frac{1}{p+1}r-\frac{1}{2}-M)).
\end{aligned}
$$

よって, rが十分大きな時, $1 \leq M < r$なるMに対して, $v_r^{(k)}$は次の漸近評価をもつ.

$$
\begin{aligned}
v_r^{(k)} &\sim \frac{(-1)^{1+\frac{1}{p+1}kr}}{2\pi i}(p+1)^{\frac{r}{p+1}-\frac{3}{2}}\{\Gamma(\frac{1}{p+1}r-\frac{1}{2}) \\
&\quad + \sum_{N=1}^{M-1}B_{2N(p+1)}((-1)^k c)(p+1)^{-N}\Gamma(\frac{1}{p+1}(r-1)-\frac{1}{2}-N)\} \\
&\quad + O(\Gamma(\frac{1}{p+1}r-\frac{1}{2}-M)).
\end{aligned}
$$

k =偶数の場合

$$\begin{aligned}
v_{(2k)r} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k}{p+1}\pi i}\infty} -x^{r-1}y_{2k}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k}{p+1}\pi i}\infty} -x^{r-1}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})}\zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}d\zeta dx \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}\int_0^{\frac{2k}{p+1}\pi i\infty} x^{r-1}e^{-x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})}dxd\zeta.
\end{aligned}$$

$x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})=\xi$ とおく.

$$\begin{aligned}
v_{(2k)r} &= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))}\int_0^{+\infty} \zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{1}{p+1})^{-\frac{r}{p+1}} \\
&\quad \times \frac{1}{p+1}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\xi^{\frac{r}{p+1}-1}d\xi d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))}\Gamma(\frac{r}{p+1}) \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \zeta^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{1}{p+1})^{-\frac{r}{p+1}}\frac{1}{p+1}d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1))}\Gamma(\frac{r}{p+1})(p+1)^{-\frac{r}{p+1}+1}(\frac{2}{p+1})^{-\frac{1}{p+1}} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty}(\frac{p+1}{2}\zeta)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(1+\frac{p+1}{2}\zeta)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(1+2\frac{p+1}{2}\zeta)^{-\frac{r}{p+1}}\frac{p+1}{2}d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}\frac{1}{p+1}^{1-\frac{r}{p+1}}\frac{\Gamma(\frac{r}{p+1})\Gamma(\frac{1+r}{p+1})}{\Gamma(\frac{r}{p+1}+\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1))} \\
&\quad \times F(\frac{r}{p+1},\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}+1),\frac{r}{p+1}+\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1);-1).
\end{aligned}$$

k =奇数の場合

$$\begin{aligned}
v_{(2k+1)r} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k+1}{p+1}\pi i}\infty} -x^{r-1}y_{2k+1}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{e^{\frac{2k+1}{p+1}\pi i}\infty} -x^{r-1}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1}(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^{+\infty} e^{x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})}\zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}d\zeta dx$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+2}}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}$$

$$\times \int_0^{+\infty}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}\zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}\int_0^{e^{\frac{2k+1}{p+1}\pi i}\infty} x^{r-1}e^{x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})}dxd\zeta$$

$x^{p+1}(\zeta+\frac{1}{p+1})=-\xi$とおく.

$$v_{(2k+1)r} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+2}}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}\int_0^{+\infty}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}\zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}$$

$$\times \int_0^{+\infty}(-\frac{\xi}{\zeta+\frac{1}{p+1}})^{\frac{r-1}{p+1}}e^{-\xi}(-\frac{1}{\zeta+\frac{1}{p+1}})(\frac{1}{p+1})(-\frac{\xi}{\zeta+\frac{1}{p+1}})^{\frac{1}{p+1}-1}d\xi d\zeta$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+2}}{2\pi i}\frac{(\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(1-\frac{c-1}{p+1})}}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}(-1)^{\frac{r}{p+1}-2}\frac{1}{p+1}\Gamma(\frac{r}{p+1})$$

$$\times \int_0^{+\infty}(\zeta+\frac{2}{p+1})^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}\zeta^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\zeta+\frac{1}{p+1})^{\frac{r}{p+1}}d\zeta$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+\frac{r}{p+1}}}{2\pi i}(\frac{2}{p+1})^{1-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\frac{1}{p+1})^{1-\frac{r}{p+1}}\frac{\Gamma(\frac{r}{p+1})}{\Gamma(-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+1)}$$

$$\times \int_0^{+\infty}(\frac{p+1}{2}\zeta)^{-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(1+\frac{p+1}{2}\zeta)^{\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1)}(1+2\frac{p+1}{2}\zeta)^{-\frac{r}{p+1}}\frac{p+1}{2}d\zeta$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)+\frac{r}{p+1}}}{2\pi i}(\frac{2}{p+1})^{1-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}+1)}(\frac{1}{p+1})^{1-\frac{r}{p+1}}\frac{\Gamma(\frac{r}{p+1})\Gamma(\frac{r+1}{p+1})}{\Gamma(\frac{r}{p+1}-\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1))}$$

$$\times F(\frac{r}{p+1},-\frac{1}{2}(\frac{c+1}{p+1}-1),\frac{r}{p+1}-\frac{1}{2}(\frac{c-1}{p+1}-1);-1).$$

参考文献

[1] 犬井鉄郎.： 特殊函数, 岩波全書 (1962),pp.182-192

[2] Majima. H.: Resurgent Equations and Stokes Multipliyers for Generalized Confluent Hypergeometric Differential Equations of the Second Order, in the Proceedings of Hayashibara Forum'90 International Symposium on Special Functions, ICM Satellite Conference Proceedings, Springer-Verlag (1991), pp.222 – 233.

[3] Majima. H., Howls, C. J. and Olde Daalhuis, A. B.: Vanishing Theorem in Asymptotic Analysis III (to appear in "Structure of Solutions of Differential Equations" edited by T.Kawai and M. Morimoto, World Science, May 1996)

[4] Mizuno. T.: On estimates of coefficients of formal solutions to inhomogeneous linear ordinary differential equations, Master's Dissertation, Ochanomizu University, (1996), (in japanese).

[5] Sibuya. Y.: Global Theory of a Second Order Linear Differential Equation with a Polynomial Coefficient,North-Holland Mathematics studies,No 18.